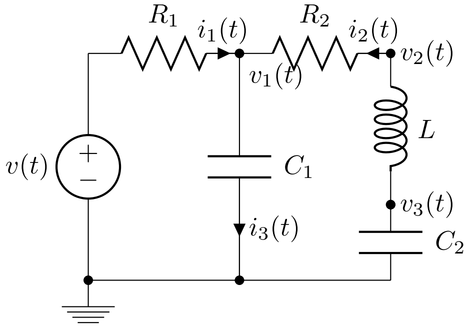
MoSim B16 **Matrikel-Nr.:** ____________________

Zweite Prüfung, 09. Oktober 2009 **Name:** ____________________

Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehenen Platz auf den Fragebögen. Wenn Sie mehr Platz für die Antworten benötigen, nutzen Sie die Rückseite oder zusätzliche Seiten. Zusätzliche Seiten müssen mit Name und Matrikelnummer versehen werden. Die Antworten sollten den entsprechenden Fragen eindeutig zuzuordnen und der Lösungsweg muss erkennbar sein.
Extraseiten: ____________________

1. (10 Punkte) Gegeben ist die folgende Schaltung aus Wiederständen, Kapazitäten und Induktivitäten. Die Spannungsquelle $v(t)$ bewirkt im Netzwerk verschiedene Spannungsabfälle gegenüber Masse.



Beschreiben Sie die Spannungsabfälle $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ des Systems mit Hilfe eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung in Matrixform.

Lösung:

Nach dem Maschensatz ist die Summe der Spannungsabfälle $v_R(t) = Ri_R(t)$ (Ohmsches Gesetz) und $v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_c(\tau)d\tau + v_C(t_0)$, $v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$ (Induktionsgesetz) in einer Masche gleich der eingespeisten Spannung. (Gleichungen 1 und 3)

$$v(t) = i_1(t)R_1 + \frac{1}{C_1}\int i_3(t)dt \tag{1}$$
$$= i_1(t)R_1 + v_1(t) \tag{2}$$

$$0 = i_2(t)R_2 + L\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt - \frac{1}{C_1}\int i_3(t)dt \tag{3}$$
$$= i_2(t)R_2 + L\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt - v_1(t) \tag{4}$$
$$= i_2(t)R_2 - v_2(t) - v_1(t) \tag{5}$$
$$= i_2(t)R_2 + L\frac{di_2(t)}{dt} - v_3(t) - v_1(t) \tag{6}$$

Nach dem Knotenkunktsatz ist die Summe aller Ströme in einem Knoten Null. (Gleichung 7)

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t) = C_1\frac{dv_1(t)}{dt} = i_1(t) + C_2\frac{dv_3(t)}{dt} \tag{7}$$

Durch Einsetzen von (2) $i_1(t) = v(t)/R_1 - v_1(t)/R_1$ und (5) $i_2 = -v(t)/R_2 + v_1(t)/R_2$ in (7) lassen sich die Ströme eliminieren. (Analog für Gleichung 9 und 10)

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = -\frac{v_1(t)}{C_1R_1} - \frac{v_1(t)}{C_1R_2} + \frac{v_2(t)}{C_1R_2} + \frac{v(t)}{C_1R_1} \tag{8}$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = -\frac{v_1(t)}{C_1R_1} - \frac{v_1(t)}{C_1R_2} - \frac{v_2(t)R_2}{L} + \frac{v_2(t)}{R_2C_1} + \frac{v_3R_3}{L} + \frac{v(t)}{C_1R_1} \tag{9}$$

$$\frac{dv_3(t)}{dt} = \frac{v_1(t)}{C_1 R_1} - \frac{v_2(t)}{C_2 R_2} \tag{10}$$

Verwendung der Matrixform:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{11}$$

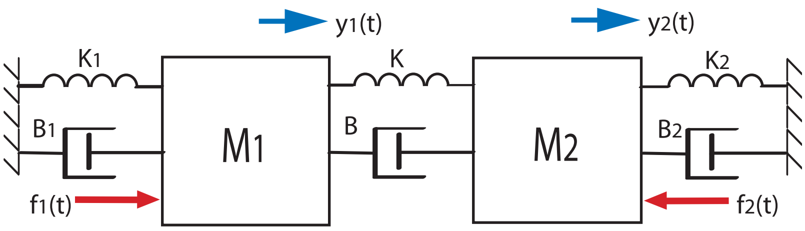
$$x_1 = v_1 \quad x_2 = v_2 \quad x_3 = v_3 \quad u = v \tag{12}$$

Mit Gleichungen 8, 9 und 10

$$\begin{bmatrix} \dot{v_1} \\ \dot{v_2} \\ \dot{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_1 R_2} & 0 \\ -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & -\left(\frac{R_2}{L} - \frac{1}{R_2 C_1}\right) & \frac{R_2}{L} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_1 C_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix} v \tag{13}$$

Mit Anfangsbedingungen $v(0) = \begin{bmatrix} v_1(0) & v_2(0) & v_3(0) \end{bmatrix}^T$.

2. (8 Punkte) Gegeben ist das folgende mechanisches System, bestehend aus zwei Massen, die mit Federn und Dämpfern zwischen zwei Aufhängungen befestigt sind. Die Kräfte $f_1(t)$ und $f_2(t)$ bewirken eine Verschiebung der Massen.



(a) (3 Punkte) Beschreiben Sie die Bewegung der Massen mit einer Differentialgleichung zweiter Ordnung (2. Newtonsches Gesetz), wobei Federn und Dämpfer als linear angenommen werden.

Lösung:

$$M_1\ddot{y}_1 + (B + B_1)\dot{y}_1 + (K + K_1)y_1 - B\dot{y}_2 - Ky_2 = f_1(t) \tag{14}$$

$$M_2\ddot{y}_2 + (B + B_2)\dot{y}_2 + (K + K_2)y_2 - B_1\dot{y}_1 - Ky_1 = -f_2(t) \tag{15}$$

Mit Anfangsbedingungen $y_1(0)$, $y_2(0)$, $\dot{y}_1(0)$ und $\dot{y}_2(0)$.

(b) (5 Punkte) Beschreiben Sie die Verschiebung der Massen $y_1(t)$, $y_2(t)$ das System mit Hilfe eines Differentialgleichungssystems erster Ordnung in Matrixform.

Lösung:

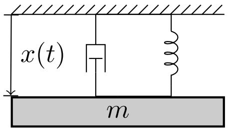
$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{16}$$

$$x_1 = y_1 \quad x_2 = \dot{y}_1 \quad x_3 = y_2 \quad x_4 = \dot{y}_2 \quad u_1 = f_1(t) \quad u_2 = f_2(t) \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_1+K}{M_1} & -\frac{B_2+B}{M_1} & \frac{K}{M_1} & \frac{B}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{M_2} & \frac{B}{M_2} & -\frac{K+K_2}{M_2} & -\frac{B+B_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \tag{18}$$

Mit Anfangsbedingungen $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & x_3(0) & x_4(0) \end{bmatrix}^T$.

3. (10 Punkte) Die freie Systemantwort $x(t)$ eines Masse-Feder-Dämpfer Systems (siehe Abbildung) mir Masse $m = 100$kg wurde gemessen und zeigt, dass nach drei Perioden die Amplitude der Verschiebung 10% der Amplitude der ersten Periode ist. Die Zeit dafür war 20s. Ziel dieser Aufgabe ist das Abschätze von Feder- und Dämpfungskonstante mit Hilfe des logarithmischen Dekrements. Beantworten Sie dazu folgende Teilfragen.



(a) (2 Punkte) Berechnen Sie das Logarithmische Dekrement δ.

Lösung:
Logarithmisches Dekrement:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{B_1}{B_{n+1}} \tag{19}$$

Mit den Daten $n = 3$ und $B_4/B_1 = 0.1$ aus der Aufgabenstellung, können wir mit Gleichung (19) das Logarithmische Dekrement berechnen:

$$\delta = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{B_1}{B_4} \right) = \frac{1}{3} \ln 10 = 0.76753$$

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie den Dämpfungsgrad ζ.

Lösung:
Dämpfungsgrad:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \tag{20}$$

Eingesetzt in Gleichung (20) erhalten wir den Dämpfungsgrad

$$\zeta = \frac{0.76753}{\sqrt{4\pi^2 + 0.76753^2}} = 0.12125$$

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenfrequenz ω_n.

Lösung:
Oszillationsfrequenz:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{21}$$

Mit $P = 20\text{s}/3 = 6.6667\text{s}$ und $\omega_d = 2\pi/P = \frac{2}{6.6667\text{s}}\pi = 0.94248\text{Hz}$, können wir die Eigenfrequenz über den Zusammenhang mit der Oszillationsfrequenz mit Gleichung (21) ermitteln. Umgestellt nach ω_n erhalten wir

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\frac{2}{6.6667\text{s}}\pi}{\sqrt{1 - 0.12125^2}} = 0.94948\text{Hz}$$

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Federkonstante k.

Lösung:

Eigenfrequenz:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{22}$$

Wir erhalten die Federkonstante k aus der umgestellten Gleichung (22)

$$k = m\omega_n^2 = (100\text{kg})(0.94948\text{Hz})^2 = 90.152\text{kg/s}^2$$

(e) (2 Punkte) Berechnen Sie die Dämpfungskonstante c.

Lösung:
Die Dämpfungskonstante erhält man mir

$$c = 2\zeta\sqrt{mk} = 2(0.12125)\sqrt{(100\text{kg})(90.152\text{kg/s}^2)} = 23.026\text{kg/s}$$