MoSim B16 **Matrikel-Nr.:** ____________________

Erste Prüfung, 24. Juli 2009 **Name:** ____________________

Beantworten Sie die Fragen in dem dafür vorgesehenen Platz auf den Fragebögen. Wenn Sie mehr Platz für die Antworten benötigen, nutzen Sie die Rückseite oder zusätzliche Seiten. Zusätzliche Seiten müssen mit Name und Matrikelnummer versehen werden. Die Antworten sollten den entsprechenden Fragen eindeutig zuzuordnen sein.
Extraseiten: ____________________

1. (10 Punkte) Gegeben sind zwei Vektoren $x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{(T)}$ und $y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^{(T)}$. Eine lineare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wird gesucht, für die $f(x) = Ax = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^{(T)}$ und $f(x+y) = A(x+y) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}^{(T)}$ ist. Berechnen Sie die Matrix A
   Hinweis: $x^{(T)}$ ist der transponierte Vektor von x. Der Lösungsweg muss erkennbar sein.

Lösung:

Wir können $f(x) = Ax$ und $f(z) = Az$ schreiben, für $z = x + y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^{(T)}$, und erhalten daraus folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ -1 &= a_{11} + a_{12} \\ a_{11} &= -1 - a_{12} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f(x_2) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ 1 &= a_{21} + a_{22} \\ a_{21} &= 1 - a_{22} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f(z_1) &= a_{11}z_1 + a_{12}z_2 \\ -3 &= 3a_{11} + 2a_{12} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f(z_2) &= a_{21}z_1 + a_{22}z_2 \\ 2 &= 3a_{21} + 2a_{22} \end{aligned} \tag{4}$$

Gleichung (1) eingesetzt in (3)

$$\begin{aligned} -3 &= 3(-1 - a_{12}) + 2a_{12} \\ a_{12} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Mit Gleichung (1) erhalten wir dann

$$a_{11} = -1 - 0 = -1 \tag{6}$$

Gleichung (2) eingesetzt in (4)

$$\begin{aligned} 2 &= 3(1 - a_{22}) + 2a_{22} \\ a_{22} &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Mit Gleichung (2) erhalten wir dann

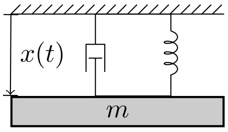
$$a_{21} = 1 - 1 = 0 \tag{8}$$

Aus (6,5,8,7) erhalten wir

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Alternative Lösung über $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(y)' = [-2, 1]$. Gleichung (3) $f(y_1) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$, $-2 = 2a_{11} + a_{12}$. Gleichung (4) $f(y_2) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$, $1 = 2a_{21} + a_{22}$. Gleichung (1) eingesetzt in (3) $-2 = 2(-1 - a_{12}) + a_{12}$. Gleichung (2) eingesetzt in (4) $1 = 2(1 - a_{22}) + a_{22}$.

2. (10 Punkte) Die freie Systemantwort $x(t)$ eines Masse-Feder-Dämpfer Systems (siehe Abbildung) mir Masse $m = 500\text{kg}$ wurde gemessen und zeigt, dass nach drei Perioden die Amplitude der Verschiebung 20% der Amplitude der ersten Periode ist. Die Zeit dafür war 9s. Ziel dieser Aufgabe ist das Abschätze von Feder- und Dämpfungskonstante mit Hilfe des logarithmischen Dekrements. Beantworten Sie dazu folgende Teilfragen.



(a) (2 Punkte) Berechnen Sie das Logarithmische Dekrement δ.

Lösung:
Logarithmisches Dekrement:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{B_1}{B_{n+1}} \tag{10}$$

Mit den Daten $n = 3$ und $B_4/B_1 = 0.2$ aus der Aufgabenstellung, können wir mit Gleichung (10) das Logarithmische Dekrement berechnen:

$$\delta = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{B_1}{B_4}\right) = \frac{1}{3} \ln 5 = 0.53648$$

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie den Dämpfungsgrad ζ.

Lösung:
Dämpfungsgrad:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \tag{11}$$

Eingesetzt in Gleichung (11) erhalten wir den Dämpfungsgrad

$$\zeta = \frac{0.53648}{\sqrt{4\pi^2 + 0.53648^2}} = 0.085074$$

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Eigenfrequenz ω_n.

Lösung:
Oszillationsfrequenz:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{12}$$

Mit $P = 9\text{s}/3 = 3\text{s}$ und $\omega_d = 2\pi/P = \frac{2}{3\text{s}}\pi = 2.0944\text{Hz}$, können wir die Eigenfrequenz über den Zusammenhang mit der Oszillationsfrequenz mit Gleichung (12) ermitteln. Umgestellt nach ω_n erhalten wir

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{\frac{2}{3\text{s}}\pi}{\sqrt{1 - 0.085074^2}} = 2.1020\text{Hz}$$

(d) (2 Punkte) Berechnen Sie die Federkonstante k.

Lösung:

Eigenfrequenz:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13}$$

Wir erhalten die Federkonstante k aus der umgestellten Gleichung (13)

$$k = m\omega_n^2 = (500\text{kg})(2.1020\text{Hz})^2 = 2209.2\text{kg/s}^2$$

(e) (2 Punkte) Berechnen Sie die Dämpfungskonstante c.

Lösung:
Die Dämpfungskonstante erhält man mir

$$c = 2\zeta\sqrt{mk} = 2(0.085074)\sqrt{(500\text{kg})(2209.2\text{kg/s}^2)} = 178.83\text{kg/s}$$

3. (10 Punkte) Die Dynamik eines Bioreaktors wird angenommen als lineares dynamisches System $\dot{x}(t) = Ax(t)$, wobei der Zustandsvektor $x(t) \in \mathcal{R}^3$ die Massen der drei beteiligten Spezies zum Zeitpunkt t beschreibt. Der Preis der Spezies ist mit dem Vektor c gegeben, wobei Spezies i einen positiven Preis c_i hat.

   Berechnen Sie die optimalen Anfangsbedingungen $x(0)$ für nichtnegative $x(0)_i$ unter Berücksichtigung des Budgets $B = 1$ in der Art, dass der Gesamtertrag zum Zeitpunkt $T = 10$s maximiert wird. Wie hoch ist der dieser Gesamtertrag unter Verwendung der optimalen Anfangsbedingungen?

   Die Systemmatrix A, der Preisvektor c und der Ertragsvektor b sind gegeben als

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, b = (e^{TA})'c = \begin{bmatrix} 5.1008 \\ 19.7175 \\ 13.5231 \end{bmatrix}$$

   Hinweis: x' ist die Transponierte von x.

Lösung:
Wir haben $c'x(T) = c'e^{TA}x(0) = b'x(0)$ wobei $b = (e^{TA})'c$ (2)

Optimierungsproblem:

maximiere $b'x(0)$ in Bezug auf $x(0)$, wobei $x(0)_i \geq 0, \forall i$ und $c'x(0) \leq B$. (2)

Lösung: Das gesamte Budget B muss in jene Komponente investiert werden, für das das Gewinnverhältnis b_i/c_i maximal ist. (2)

$$b_k/c_k = max\{b_1/c_1, \ldots, b_n/c_n\}, k = 3$$

Setze $x(0)_k = B/c_k$, den Rest 0. (2)

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Der Gesamtwert der Komponenten ist $b'x(0) = 135.23$ (2)