Systemantwort für System erster Ordnung

MoSim (SU) Woche 27

Dr. Olaf Bochmann

4. Juli 2009

Übersicht

Aufgabenstellung

Ein Raketenschlitten hat die Masse von $500\mathrm{kg}$ mit $c = 1000\mathrm{N\ s/m}$. Der Schub $f(t)$ ist eine Sprungfunktion der Größe von $2 \times 10^5\mathrm{N}$. Wie lange muss die Rakete betrieben werden, das der Schlitten $100\mathrm{m}$ weit kommt? Der Schlitten startet aus der Ruhe $(\dot{x}(0) = 0)$ bei $x(0) = 0$.

Bewegungsgleichung

Modell eins Raketenschlittens als Differentialgleichung

(1) $m\dot{v}(t) = f(t) - cv(t)$

Systemantwort

Laplace Transformation der Gleichung (1)

$$m[sV(s) - v(0)] = F(s) - cV(s).$$

nach $V(s)$ auflösen

$$V(s) = \frac{mv(0)}{ms + c} + \frac{1}{ms + c}F(s).$$

Nenner $ms + c$ ist das *charakteristische Polynom*mit der Wurzel $s = -c/m$. Durch Rücktransformation erhalten wir die Systemantwort

(2) $v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{mv(0)}{ms + c}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ms + c}F(s)\right]$

Autonome Systemantwort

Die autonome (freie) Systemantwort ergibt sich aus dem linken Term der Systemantwort (2) mit den Anfangsbedungungen. Durch Rücktransformation erhält man

(3) $v_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{mv(0)}{ms + c}\right] = v(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + c/m}\right] = v(0)e^{-ct/m}.$

Erzwungene Systemantwort

Der rechte Term der Systemantwort (2) mit der Kraft $f(t)$ heißt *erzwungenen Systemantwort.* Kraft $F(s)$ wird als Sprungfunktion definiert:

- $f = 0$ für $t < 0$ und
- eine nichtnegative Konstante f für $t \geq 0$

Die Laplace Transformierte der Sprungfunktion ist $\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = f/s$.

Sprungantwort

Sprungfunktion in den rechten Term der Systemantwort (2) eingesetzt

$$v_s = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ms+c}F(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ms+c}\frac{f}{s}\right]$$

Partialbruchzerlegung an

$$\frac{1}{ms+c}\frac{f}{s} = \frac{f}{m}\frac{1}{s(s+c/m)} = \frac{f}{m}\left(\frac{C_1}{s+c/m} + \frac{C_2}{s}\right)$$

Residuals C_1 ind C_2 bestimmt durch kleinstes gemeinsames Vielfaches

$$\frac{f}{m}\frac{1}{s(s+c/m)} = \frac{f}{m}\frac{C_1 s + C_2(s+c/m)}{s(s+c/m)}$$

Kürzen; die einzige Lösung um s zu eliminieren $C_1 + C_2 = 0$ ist

$$1 = C_1 s + C_2(s+c/m) = s(C_1+C_2) + C_2 c/m = C_2 c/m$$

... Sprungantwort

die Lösung für $C_2 = m/c$ und $C_1 = -m/c$. Eingesetzt in die Partialbüche und Rücktransformation

$$v_s = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{f}{m}\left(\frac{m/c}{s} - \frac{m/c}{s+c/m}\right)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{f}{c}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+c/m}\right)\right] = \frac{f}{c}\left(u_s(t) - e^{-ct/m}\right)$$

Da wir nur an dem $t \geq 0$ Teil der Systemantwort interesse haben, in dem $u(t) = 1$, erhalten wir für die Sprungantwort des Systems erster Ordnung für $t \geq 0$

(4) $\quad v_s = \frac{f}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$

Vollständige Systemantwort

vollständige Systemantwort (2) mit Sprungfunktion am Eingang für $t \geq 0$

(5) $\quad v = v_a + v_s = v(0)e^{-ct/m} + \frac{f}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$

mit den Gleichungen der freien Systemantwort (3) und der Sprungantwort (4)

Verschiebung

Die *Verschiebung* $x(t)$ kann durch Integration der Geschwindigkeit v(t) der vollständige Systemantwort (5) angegeben werden

(6) $x(t) = \frac{mv(0)}{c}(1 - e^{-ct/m}) + \frac{f}{c}t + \frac{fm}{c^2}(e^{-ct/m} - 1) + x(0)$

Lösung der Aufgabe

Aus der Bewegungsgleichung (1) erhalten wir

$$(500\mathrm{kg})\dot{v}(t) = (2 \times 10^5\mathrm{N}) - (1000\mathrm{N\ s/m})v(t)$$

mit den Anfangsbedingungen $(\dot{x}(0) = 0)$ bei $x(0) = 0$. Die zurückgelegte Entfernung erhalten aus der Verschiebungsgleichung (6)

(7) $x(t) = (200\mathrm{m/s})t + (100\mathrm{m})(e^{-(2\mathrm{s}^{-1})t} - 1)$

wir setzen $x(t) = 100\mathrm{m}$ und dividieren beide Seiten durch $100\mathrm{m}$

$$0 = (2\mathrm{m/s})t + e^{-(2\mathrm{s}^{-1})t} - (2\mathrm{m})$$

... Lösung der Aufgabe

Die Nullstellen dieser Gleichung lassen sich numerisch berechnen. Wir verwenden die Newton-Iteration für die Funktion $f(t) = (2\mathrm{m/s})t + e^{-(2\mathrm{s}^{-1})t} - (2\mathrm{m}) = 0$

(8) $t_{i+1} = t_i - \frac{f(t_i)}{f'(t_i)} = t_i - \frac{(2\mathrm{m/s})t + e^{-(2\mathrm{s}^{-1})t} - (2\mathrm{m})}{(2\mathrm{m/s}) - (2\mathrm{m/s})e^{-(2\mathrm{s}^{-1})t_i}}$

... Lösung der Aufgabe

Für die Iteration benötigen wir einen guten Näherungswert für t_1. Wenn wir in der Bewegungsgleichung den Term für den Luftwiderstand vernachlässigen, dann erhalten wir $(500\mathrm{kg})\dot{v}(t) = (2 \times 10^5\mathrm{N})$, oder $\dot{v}(t) = 400\mathrm{ms}^{-2}$. Die erste Integration ergibt $v(t) = (400\mathrm{ms}^{-2})t$ und die zweite Integration ergibt $x(t) = (200\mathrm{ms}^{-2})t^2$. Setzen wir jetzt $x(t) = 100\mathrm{m}$ erhalten wir ohne Luftwiderstand eine Reisezeit von $t_1 = 0.70711$. Das ist eine Unterschätzung der eigentlichen Reisezeit, kann aber als Anfangswert für den Newton Algorithmus dienen. Damit erhalten wir

$$t_2 = 0.93348, t_3 = 0.92073, t_4 = 0.92070, t_5 = 0.92070$$

Die Iteration hat nach 5 Schritten auf die 5. Dezimalstelle konvergiert. Eine Überprüfung in Gleichung (7) ergibt für $t(0.92070\mathrm{s}) = 100\mathrm{m}$.

Formeln

Systemantwort (2)	$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{mv(0)}{ms+c}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ms+c}F(s)\right]$
Autonome Systemantwort (3)	$v_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{mv(0)}{ms+c}\right] = v(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+c/m}\right] = v(0)e^{-ct/m}$
Sprungantwort (4)	$v_s = \frac{f}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$
Vollständige Systemantwort (5)	$v = v_a + v_s = v(0)e^{-ct/m} + \frac{f}{c}\left(1 - e^{-ct/m}\right)$
Verschiebung (6)	$x(t) = \frac{mv(0)}{c}(1 - e^{-ct/m}) + \frac{f}{c}t + \frac{fm}{c^2}(e^{-ct/m} - 1) + x(0)$
Newton Iteration (8)	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ finde Lösung für $f(x) = 0$