Optimale Anfangsbedingungen für Bioreaktor

MoSim (SU) Woche 29

Dr. Olaf Bochmann

16. Juli 2009

Übersicht

Aufgabe

Es sind die optimalen Anfangsbedingungen für einen Bioreaktor zu bestimmen. Die Dynamik $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ist gegeben mit $x(t) \in \mathcal{R}^n$ als Zustandsvektor, wobei $x_i(t)$ die Gesammtmasse einer Komponente i zum Zeitpunkt t beschreibt. Die Komponente i hat einen positiven Preis c_i. Damit ist der Gesamtwert der Komponenten zum Zeitpunkt t: $c'x(t)$.
Das Problem ist die Anfangsbedingungen zu wählen, unter Berücksichtigung des Budgets, die den Gesamtertrag zum Zeitpunkt T maximieren. Genauer, wähle $x(0)$ mit nichtnegativen Elementen, die $c'x(0) \leq B$ erfüllen, wobei B ein gegebenes positives Budget ist. A, c, T, B sind gegeben.
Beispieldaten:

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 0.6 \\ 1.1 \\ 2.0 \end{bmatrix}, T = 10, B = 1$$

1. Erklären Sie wie man das Problem löst (mit Beweis)
2. Lösen Sie das Problem mit den Beispieldaten. Geben Sie $x(0)$ und den optimalen Gesamtwert der Komponenten $c'x(T)$ an.

Lösungsweg

Wir haben $c'x(T) = c'e^{tA}x(0) = b'x(0)$ wobei $b = (e^{TA})'c$
Optimierungsproblem:
maximiere $b'x(0)$ in Bezug auf $x(0)$, wobei $x(0)_i \geq 0, \forall i$ und $c'x(0) \leq B$.

c_i Preis für eine Einheit der Komponente i

b_i Ertrag für Komponente i

b_i/c_i Gewinnverhältnis für Komponente i

Lösung: Das gesamte Budget B muss in jene Komponente investiert werden, für das das Gewinnverhältnis b_i/c_i maximal ist.

$$b_k/c_k = max\{b_1/c_1, \ldots, b_n/c_n\}$$

Bestimme k und setze $x(0)_k = B_k c_k$, den Rest 0. Der Gesamtwert der Komponenten ist $b'x(0)$

Beweis

Der Gesamterlös ist

$$\begin{aligned} b'x(0) &= \sum_{i=1}^{n} (b_i/c_i)(c_i x(0)_i) \\ &\leq (\max_{i=1,\ldots,n} (b_i/c_i)) \sum_{i=1}^{n} (c_i x(0)_i) \\ &\leq (\max_{i=1,\ldots,n} (b_i/c_i)) B \end{aligned}$$

Kein geeignetes $x(0)$ kann einen Gesamterlös $c'x(T) = b'x(0)$ erzielen, der der höher ist als $(\max_{i=1,\ldots,n}(b_i/c_i))B$.

Lösung mit Beispieldaten

```
% problem data
A=[ 0.1 0.1 0.3 0;0 0.2 0.4 0.3;0.1 0.3 0.1 0;0 0 0.2 0.1];
c=[3.5; 0.6; 1.1; 2.0];n=length(c);T=10;B=1;
b= (expm(T*A))'*c;
[g,k]=max(b./c); % get max value and index k
opt_x0=zeros(n,1);
opt_x0(k)=B/c(k);
opt_term_value=b'*opt_x0
opt_term_value =  1168.4
opt_x0
opt_x0 =
   0.00000
   1.66667
   0.00000
   0.00000
```

Der optimale Gesamterlös des Bioreaktors ist 1168.4 mit der Anfangsbedingung $x(0)_2 = 1.66667$ (der Rest 0).