Dämpfungsindikatoren und Zeitverhalten

MoSim (SU) Woche 26

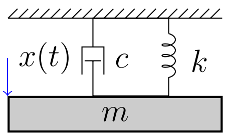
Dr. Olaf Bochmann

30. Juni 2009

Übersicht

Aufgabenstellung

Die freie Systemantwort $x(t)$ eines Systems mir Masse $m = 1000\mathrm{kg}$ wurde gemessen und zeigt, dass nach fünf Perioden die Amplitude der Verschiebung 10% der Amplitude der ersten Periode ist. Die Zeit dafür war $20\mathrm{s}$. Schätzen Sie die Dämpfungskonstante c und die Federkonstante k ab.



Dämpfungsgrad

Charakteristische Gleichung des Feder-Masse-Dämpfer Systems ist

(1) $$ms^2 + cs + k = 0$$

Die Wurzeln (Polen des Systems) sind

(2) $$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -a \pm ib$$

mit $b = \sqrt{k/m}$ Der Dämpfungsgrad ist

(3) $$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$$

Dämpfungsgrad und Systemverhalten

Die Definition des Dämpfungsgrads ist begründet durch die Art wie sich die Wurzeln in Abhängigkeit von c von real nach komplex ändern. Aus Gleichung (2) können wir drei mögliche Fälle sehen:

kritisch Mehrfach-Nullstellen, wenn $c^2 - 4mk - 0$, also $c = c_c = 2\sqrt{mk}$. Somit ist $\zeta = 1$.

überdämpft zwei verschiedene reale Nullstellen, wenn $c > c_c$. Exponentiales Verhalten mit $\zeta > 1$.

unterdämpft komplexe Wurzeln, wenn $c < c_c$. Oszillation mit $\zeta < 1$.

Eigenfrequenz

Die *Eigenfrequenz* ist die Frequenz des Systems ohne Dämpfung, also nur der imaginäre Teil $b = \sqrt{k/m}$ der Wurzel (2)

(4) $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Jetzt können wir die charakteristische Gleichung (1) in Bezug auf ω_n und ζ schreiben

(5) $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$

und erhalten die Wurzeln

(6) $s = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -a \pm ib$

mit $a = \zeta\omega_n$, $b = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ und der Zeitkonstante

(7) $\tau = 1/a = 1/\zeta\omega_n$

für $\zeta \leq 1$

Oszillationsfrequenz

Die *Oszillationsfrequenz* entspricht dem imaginären Teil der Wurzel (6) und ist

(8) $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

nur für unterkritische Dämpfung ($\zeta < 1$) definiert; $\omega_d < \omega_n$. Die Oszillationsfrequenz immer kleiner als die Eigenfrequenz $\omega_d < \omega_n$.

Logarithmisches Dekrement

Eine Methode zum Abschätzen des Dämpfungsgrads ζ und somit der Dämpfungskonstante $c = 2\zeta\sqrt{mk}$. Mit $s = -\zeta\omega_n \pm \omega_d i$ für die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, kann man die freie Systemantwort für unterkritische Dämpfung aufstellen:

$$x(t) = Be^{-at}\sin(bt + \phi) = Be^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)$$

ω_d Frequenz der Oszillation mit periode $P = 2\pi/\omega_d$

Logarithmisches Dekrement δ aus freier Systemantwort

(9) $$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+P)} = \ln\frac{Be^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \phi)}{Be^{-\zeta\omega_n(t+P)}\sin(\omega_d(t+P) + \phi)}$$

$x(t), x(t+P)$ aufeinanderfolgender Amplituden

Logarithmisches Dekrement (cont.)

Mit $e^{-\zeta\omega_n(t+P)} = e^{-\zeta\omega_n t}e^{-\zeta\omega_n P}$, $\omega_d P = 2\pi$ und $\sin(\omega_d t + \omega_d P + \phi) = \sin(\omega_d t = \phi)$

$$\delta = \ln e^{\zeta\omega_n P} = \zeta\omega_n P$$

Mit $P = 2\pi/\omega_d = 2\pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

(10) $$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Lösen nach Dämpfungsgrad ζ

(11) $$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}.$$

Logarithmisches Dekrement (n Perioden)

Angenommen $B_1, B_2, \ldots$ sind Werte für x in den Scheitelpunkten. Mit $\ln\left(\frac{B_1}{B_2}\frac{B_2}{B_3}\cdots\frac{B_n}{B_{n+1}}\right) = \ln\frac{B_1}{B_{n+1}}$ oder $\ln\frac{B_1}{B_2} + \ln\frac{B_2}{B_3} + \cdots + \ln\frac{B_n}{B_{n+1}} = \ln\frac{B_1}{B_{n+1}}$ und mit Gleichung (3) $\delta + \delta + \cdots + \delta = n\delta = \ln\frac{B_1}{B_{n+1}}$ erhalten wir für das logarithmische Dekrement (n Perioden)

(12) $\delta = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{B_1}{B_{n+1}}$

Aufgrund von Messfehlern im Plot $x(t)$ ist es nicht sinnvoll direkt aufeinanderfolgende Scheitelpunkte für die Werte von x zu verwenden. Um Fehler zu minimieren erweitern wir die Methode für zwei Scheitelpunkte, die n Perioden auseinander liegen. Es macht Sinn mit dem ersten Scheitelpunkt zu beginnen.

Lösung der Aufgabe

Mit den Daten $n = 5$ und $B_6/B_1 = 0.1$ aus der Aufgabenstellung, können wir mit Gleichung (12) das Logarithmische Dekrement berechnen:

$$\delta = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{B_1}{B_6}\right) = \frac{1}{5}\ln 10 = 0.46052$$

Eingesetzt in Gleichung (11) erhalten wir den Dämpfungsgrad

$$\zeta = \frac{0.46052}{\sqrt{4\pi^2 + 0.46052^2}} = 0.073097$$

Mit $P = 20/5 = 4\mathrm{s}$ und $\omega_d = 2\pi/P = \pi/2\mathrm{Hz}$, können wir die Eigenfrequenz über den Zusammenhang mit der Oszillationsfrequenz mit Gleichung (8) ermitteln. Umgestellt nach ω_n erhalten wir

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi/2\mathrm{Hz}}{\sqrt{1-0.073097^2}} = 1.5750\mathrm{Hz}$$

Wir erhalten die Steifheit k aus der umgestellten Gleichung (4)

$$k = m\omega_n^2 = 1000\mathrm{kg}(1.5750\mathrm{Hz})^2 = 2480.7\mathrm{kg/s^2}$$

Die Dämpfungskonstante erhält man mit

$$c = 2\zeta\sqrt{mk} = 2(0.073097)\sqrt{1000\mathrm{kg}(2480.7\mathrm{kg/s^2})} = 230.26\mathrm{kg/s}$$

Formeln

Model	$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$
Wurzeln (2)	$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$
Dämpfungsgrad (3,11)	$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$
Eigenfrequenz (4)	$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Oszillationsfrequenz (8)	$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$
Zeitkonstante (7)	$\tau = 2m/c = 1/\zeta\omega_n$, für $\zeta \leq 1$
logarithmische Dekrement (10,12)	$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{n} \ln \frac{B_1}{B_{n+1}}$

mit Verschiebung x in $[\mathrm{m}]$, Geschwindigkeit $\dot{x}$ in $[\mathrm{m/s}]$, Beschleunigung $\ddot{x}$ in $[\mathrm{m/s^2}]$, Masse m in $[\mathrm{kg}]$, Dämpfungskonstante c in $[\mathrm{kg/s}]$, Federkonstante k in $[\mathrm{N/m}] = [\mathrm{kg/s^2}]$, $f(t)$ in $[\mathrm{N}] = [\mathrm{kg\ m/s^2}]$, ω_n und ω_d in $[\mathrm{Hz}] = [\mathrm{s^{-1}}]$