Systemantwort für System zweiter Ordnung

MoSim (SU) Woche 28

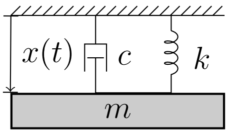
Dr. Olaf Bochmann

9. Juli 2009

Übersicht

Aufgabenstellung

Die Systemantwort $x(t)$ des Feder Masse Dämpfer Systems (siehe Abbildung) soll mit Hilfe der Laplace Transformation gefunden werden.



Folgende Parameter sind gegeben:

- Masse $m = 2\text{kg}$
- Dämpfungskonstante $c = 6\text{kg/s}$
- Federkonstante $k = 17\text{N/m}$

Die Anfangsbedingungen sind:

- Anfangsverschiebung $x(0) = 2\text{m}$
- Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(0) = 5\text{m/s}$

Bewegungsgleichung

Modell des Feder Masse Dämpfer Systems als Differentialgleichung

(1) $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = r(t)$

Laplace Transformation der Bewegungsgleichung

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + c[sX(s) - x(0)] + kX(s) = F(s)$$

Umstellen ergibt

$$(ms^2 + cs + k)X(s) = mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0) + F(s)$$

Systemantwort

Systemantwort ist Funktion der Ausgangsgröße nach der Zeit $x(t)$. Aus der Laplace transformierten und umgestellten der Bewegungsgleichung (1)

$$(2)\quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0)}{ms^2 + cs + k}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{ms^2 + cs + k}F(s)\right] = x_a(t) + x_f(t)$$

Wir erhalten die Summe aus

1. autonomer Systemantwort $x_a(t)$ (linker Term)
2. erzwungener Systemantwort $x_f(t)$ (rechter Term)

Wurzeln der charakteristischen Gleichung

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung, also dem Nenner-Polynom $ms^2 + cs + k = 0$ aus Gleichung (2) sind

$$(3)\quad s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}.$$

Die Wurzeln fallen dabei in eine der folgenden Kategorien:

1. reale und unterscheidbare Wurzeln
2. doppelte Wurzeln
3. konjugiert komplexe Wurzeln ($s_{1,2} = -a \pm ib$)

Lösung der Wurzeln aus Aufgabenstellung

```
m=2;c=6;k=17;
s=roots([m c k])
s1 = -1.5000 + 2.5000i
s2 = -1.5000 - 2.5000i
```

Die Wurzeln haben die Form

$$s_{1,2} = -a \pm ib$$

Kategorie 3 Problem!

Autonome Systemantwort (Kategorie 3)

Wir können also den autonomen Teil der Systemantwort aus Gleichung (2) in Faktorform schreiben

$$x_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0)}{ms^2 + cs + k}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0)}{(s + a - ib)(s + a + ib)}\right]$$

wobei $s_{1,2} = -a \pm ib$ die Wurzeln sind. Diese Form kann man zu einer Summe erweitern

$$x_a(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_1}{s + a - ib} + \frac{C_2}{s + a + ib}\right]$$

Rücktransformation mit Summe einfacher Laplace-Korrespondenzen ergibt Exponentialfunktionen

(4) $x_a(t) = C_1 e^{-at} e^{ibt} + C_2 e^{-at} e^{-ibt}$

Berechnung der Residuals

Residuals wie folgt berechnet werden:

(5) $C_{1,2} = \lim_{s \to -a \pm ib} [X(s)(s + a \mp ib)]$

Nach Kürzen von $(s + a - ib)$ oder von $(s + a + ib)$ und biden des Grenzwertes des Nenners erhalten wir die Residuals in kartesischen Koordinaten

$$C_1 = \lim_{s \to -a+ib}\left[\frac{mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0)}{(s + a + ib)}\right] = \frac{1}{2ib} \lim_{s \to -a+ib} [mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0)].$$

$$C_2 = -\lim_{s \to -a-ib}\left[\frac{mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0)}{(s + a - ib)}\right] = \frac{1}{2ib} \lim_{s \to -a-ib} [mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0)].$$

Residuals in Polarkoordinaten

Grenzwert des Zählerpolynoms ist komplexe Funktion R

$$R(-a+ib) = |R(-a+ib)|e^{i\phi} = \lim_{s\to -a+ib}[mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0)]$$

$$R(-a-ib) = |R(-a-ib)|e^{-i\phi} = \lim_{s\to -a-ib}[mx(0)s + m\dot{x}(0) + cx(0)]$$

Durch ersetzen des Zählergrenzwertes durch die Funktion R in Exponentialform erhalten wir für die Residuals

(6) $C_1 = \frac{1}{2ib}|R(-a+ib)|e^{i\phi}$

(7) $C_2 = -\frac{1}{2ib}|R(-a+ib)|e^{-i\phi}.$

Autonome Systemantwort in Polarkoordinaten

Die Residuals eingesetzt in Gleichung (4) ergibt

$$x_a(t) = \frac{1}{2ib}|R(-a+ib)|e^{i\phi}e^{-at}e^{ibt} - \frac{1}{2ib}|R(-a+ib)|e^{-i\phi}e^{-at}e^{-ibt}.$$

Hier lässt sich zunächst $1/b|R(-a+ib)|e^{-at}$ ausklammern. Der Ausdruck lässt sich mit der Beziehung $\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}/(2i)$ vereinfachen, wobei $\theta = bt + \phi$ eingesetzt wird. Damit erhalten wir für die freie Systemantwort mit Polarkoordinaten

(8) $x_a(t) = \frac{1}{b}|R(-a+ib)|e^{-at}\frac{e^{ibt}e^{i\phi} - e^{-ibt}e^{-i\phi}}{2i} = \frac{1}{b}|R(-a+ib)|e^{-at}\sin(bt+\phi).$

Phasenwinkel

Der Phasenwinkel $\phi = \angle R(-a+ib)$ ist der Winkel zwischen dem Vektor R und der positiven Realachse in der komplexen Ebene. Der prinzipielle Wert des Winkels ist hier als Interval $(0, 2\pi]$ definiert und kann mit dem Arkustangens wie folgt bestimmt werden

(9) $\phi = \angle R(-a+ib) = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{für } a>0, b \text{ beliebig} \\ \arctan(b/a)+\pi & \text{für } a>0, b\geq 0 \\ \arctan(b/a)-\pi & \text{für } a<0, b<0 \\ \pi/2 & \text{für } a=0, b>0 \\ -\pi/2 & \text{für } a=0, b<0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a=0, b=0 \end{cases}.$

Allgemeine Lösung der Aufgabe

Wir gehen von der Bewegungsgleichung (1) des Masse-Feder-Dämpfer Systems aus. Nach Laplace Transformation, Umstellen und durch m dividieren

$$\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right) X(s) = x(0)s + \dot{x}(0) + \frac{c}{m}x(0) + \frac{F(s)}{m}$$

und für X(s) somit

$$X(s) = \frac{x(0)s + \dot{x}(0) + \frac{c}{m}x(0)}{\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} + \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)}F(s)$$

Für die freie Antwort verwenden wir den linken Term der Gleichung mit Zähler $P(s)$ und Nenner $Q(s)$

$$X_a(s) = \frac{x(0)s + \dot{x}(0) + \frac{c}{m}x(0)}{\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

... Allgemeine Lösung der Aufgabe

Die komplexe Funktion R ist

$$R(-a + ib) = \dot{x}(0) + ax(0) + ibx(0)$$

der Betrag von R ist

$$|R(-a + ib)| = \sqrt{[\dot{x}(0) + ax(0)]^2 + [bx(0)]^2}$$

der Phasenwinkel

(10) $\phi = Atan2(bx(0), \dot{x}(0) + ax(0)) = \arcsin[x(0)/B]$

damit erhalten wir die Gleichung für die Systemantwort

(11) $x_a(t) = Be^{-at} \sin(bt + \phi)$

mit

(12) $B = 1/b\sqrt{[\dot{x}(0) + ax(0)]^2 + [bx(0)]^2} = x(0)/\sin\phi$

Spezielle Lösung der Aufgabe

Mit $m = 2$, $c = 6$ und $k = 17$ erhalten wir mit Gleichung (2) die charakteristische Gleichung

$$0 = 2s^2 + 6s + 17$$

mit den Nullstellen $s_{1,2} = -a \pm bi = -1.5 \pm 2.5i$. Damit erhalten wir $a = 1.5$ und $b = 2.5$. Phasenwinkel ϕ und B sind eine Funktion der Anfangsbedingungen. Phasenwinkel ϕ wird nach den Gleichung (10) berechnet:

$$\phi = atan2(5, 8) = \arctan(5/8) = 0.5586$$

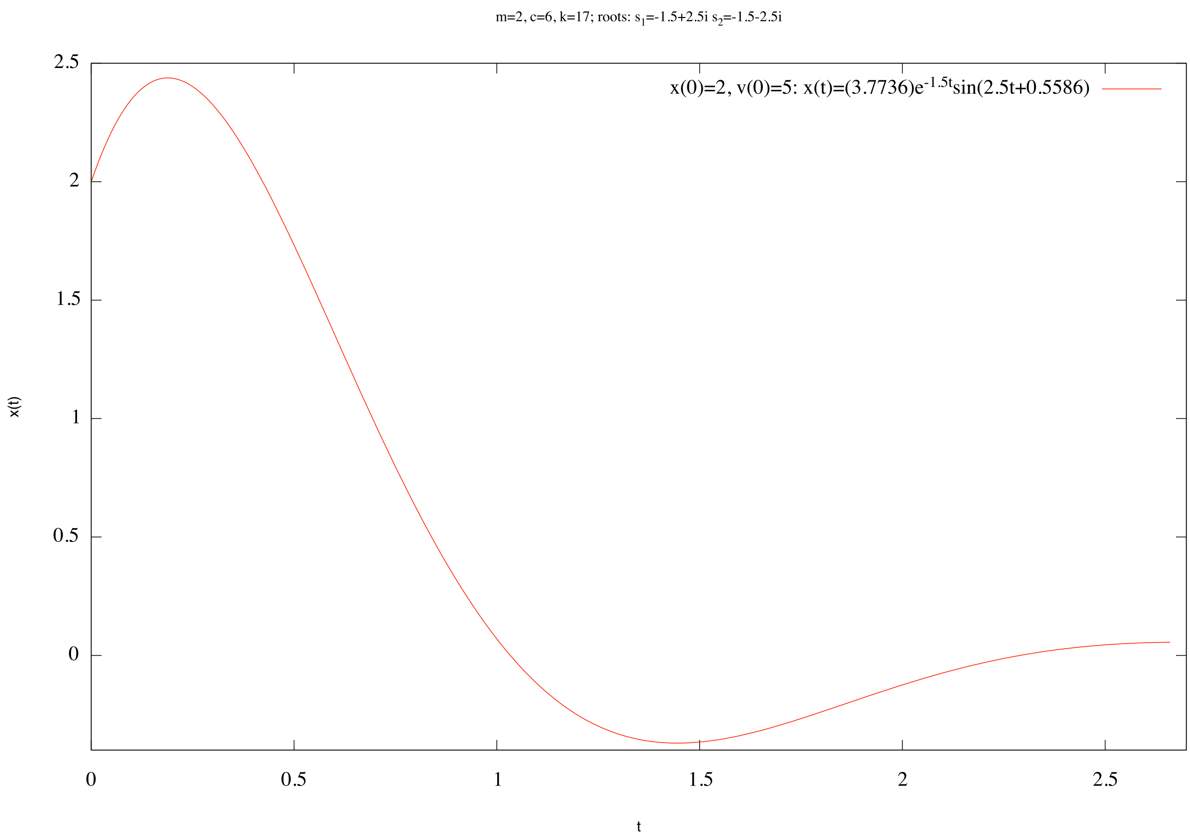
B wird nach den Gleichung (12) berechnet:

$$B = 2/\sin\phi = 2/\sin 0.5586 = 3.773$$

Freie Systemantwort nach Gleichung (11) ist

$$x(t) = 3.773e^{-1.5t}\sin(2.5t + 0.5586)$$

... Spezielle Lösung der Aufgabe



Formeln Freie Systemantwort (System zweiter Ordnung)

Wurzeln (3)	$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -a \pm ib,\ b > 0$
Systemantwort (11)	$x_a(t) = Be^{-at} \sin(bt + \phi)$
Phasenwinkel (10)	$\phi = atan2[bx(0), \dot{x}(0) + ax(0)] = \arcsin[x(0)/B]$
B (12)	$B = 1/b\sqrt{[\dot{x}(0) + ax(0)]^2 + [bx(0)]^2} = x(0)/\sin\phi$
wenn $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ dann (9)	$\theta = atan2(y, x) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{wenn } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{wenn } x < 0 \\ \pi/2 & \text{wenn } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ 3\pi/2 & \text{wenn } x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$
Eigenschaften	$\theta = atan2(\sin\theta, \cos\theta)$
	$atan2(By, Bx) = atan2(y, x)$ wenn $B > 0$